

# Modellieren und Optimieren bei Schaukeln und schwingenden Affen <sup>1</sup>

HANS HUMENBERGER, WIEN

In diesem Aufsatz behandeln wir zwei Optimierungsprobleme, nämlich einerseits den idealen Absprungmoment (bzw. -winkel) zu finden, um bei einer Schaukel möglichst weit zu springen, und andererseits bei schwingenden Affen (z. B. hängende Gibbon-Affen) den idealen Zeitpunkt bzw. Winkel des Loslassens zu finden, wieder um möglichst weit zu kommen. Dazu müssen zunächst einmal Modelle für die zugehörigen Bewegungen aufgestellt werden, sodass man eine zu maximierende Zielfunktion erhält. Dabei werden auch Technologieeinsatz und unerwartete Lösungen bzw. Einschätzungen eine wichtige Rolle spielen.

Die Flugparabel ist ein im Mathematikunterricht häufig anzutreffendes Thema, das aus verschiedenen Blickwinkeln behandelt wird (Physik, Aufspalten einer Bewegung in eine Horizontal- und eine Vertikalkomponente, quadratische Funktion, Scheitel, etc.). Außerdem spielt sie bei vielen Modellierungsaufgaben für Schülerinnen und Schüler bzw. Studierende implizit oder explizit eine große Rolle (Basketball-Freiwürfe, Fußballabstoß – mit und ohne Luftwiderstand, etc.). Da liegt jedenfalls die Idee relativ nahe, die Flugparabel einmal in Verbindung zu bringen (d. h. zu kombinieren) mit Kreisbewegungen, wie sie bei Schaukeln bzw. Pendeln auftreten.

Tatsächlich gibt es dafür auch substanzielle Möglichkeiten, und zwar ohne die Gefahr von Scheinanwendungen (an den Haaren herbeigezogenen Einkleidungen). Dabei spielt auch Technologie bzw. Technologieeinsatz eine besondere Rolle, worauf wir weiter unten noch näher eingehen werden. Überraschenderweise gibt es aber für den zunächst komplizierter scheinenden Fall eine geschlossene algebraische Lösung, während das im scheinbar einfacheren Fall nicht so ist. Dass es im komplizierteren Fall (Abschnitt 2) eine „geschlossene“ Lösung gibt und diese konstant  $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \triangleq 45^\circ$  ist, ist vermutlich auch einigermaßen überraschend, man würde das a priori vielleicht kaum vermuten.

## 1. Schaukelweitsprung



Abb. 1: Schaukelabsprung

<sup>1</sup> Dies ist eine leicht überarbeitete Version des Beitrags gleichen Titels in *Der Mathematikunterricht* 70 (2024), 1, 45-54. Für eine Version in englischer Sprache vgl. (Humenberger 2022).

Schaukeln ist etwas, das die meisten Kinder unheimlich gerne machen. Die meisten Erwachsenen haben in ihrer Kindheit auch geschaukelt und versucht, nach dem Abspringen möglichst weit zu „springen“. In meiner Kindheit hat es da jedenfalls regelrechte Wettbewerbe (zwischen einigen Kindern der Umgebung) gegeben. Die Frage, die sich dabei in natürlicher Weise stellt, ist: **Wie kann ich möglichst weit springen?** Kinder auf der Schaukel bemühen da nicht vorher Mathematik, sondern handeln einfach intuitiv. Gleichwohl kann man hier Mathematik benutzen, um die intuitiv naheliegenden „Lösungen“ zu bestätigen.

Kinder lernen beim Schaukeln früh, wie man *Schwung holt*, d. h. die Auslenkungswinkel – nach vorne und nach hinten – erhöht. Aber beim letzten *Durchgang* von hinten nach vorne (vor dem Absprung) nehmen wir an, dass keine irgendwie beschleunigenden Aktivitäten unternommen werden. In diesem letzten Durchgang hat man eine Anfangsauslenkung  $\varphi$  nach hinten und muss entscheiden, bei welchem Winkel  $\alpha$  nach vorne man am besten abspringt (Abb. 2).

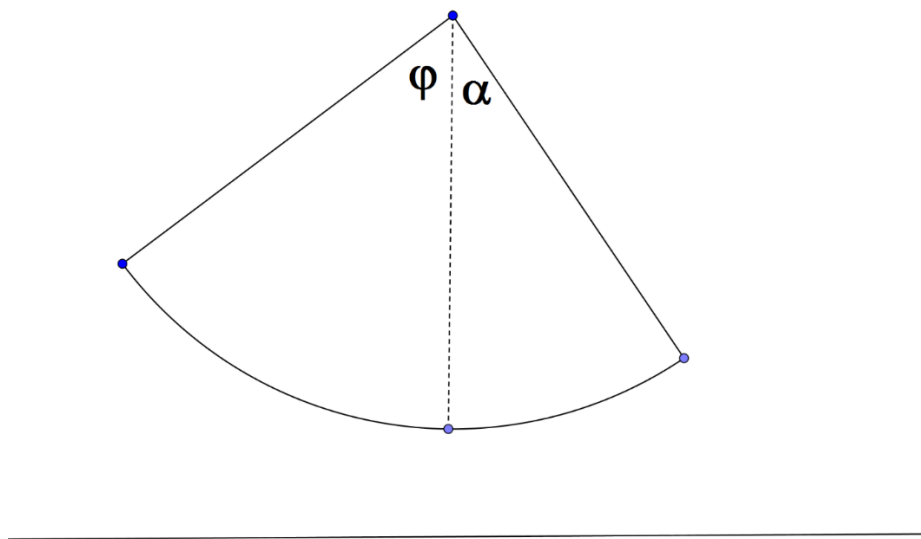


Abb. 2: Anfangsauslenkung ( $\varphi$ ) nach hinten vor dem letzten Schaukeldurchgang und Absprungwinkel ( $\alpha$ ) nach vorne

Dabei gilt klarerweise  $0 \leq \alpha \leq \varphi$ , weil ja kein „Anschubsen“ von außen und auch sonst keine aktive Beschleunigung stattfinden soll. Der optimale Absprungwinkel wird sicher nicht bei  $\alpha = \varphi$  (sozusagen am vorderen Totpunkt) liegen, denn da kann man von der Schaukel ja keinen Schwung mitnehmen (weder nach oben noch nach vorne – man würde dort einfach nach unten fallen), und wohl auch nicht bei  $\alpha = 0$ , denn lotrecht unter der Schaukelaufhängung (d. h. am erdnächsten Punkt) hat man zwar eine hohe Geschwindigkeit, aber die ist rein nach vorne gerichtet, überhaupt nicht nach oben. Irgendwo dazwischen wird der optimale Absprungwinkel sein, und als erste intuitive Lösung wird man vielleicht ungefähr die Mitte, d. h. einen Winkel in der Nähe von  $\frac{\varphi}{2}$  schätzen:  $\alpha_{\text{opt}} \approx \frac{\varphi}{2}$ . Wie gut wäre diese

Schätzung als Faustregel? Liegt man mit  $\frac{\varphi}{2}$  eher über oder unter dem genauen Wert  $\alpha_{\text{opt}}$ ? Gibt es Fälle,

in denen  $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\varphi}{2}$  genau stimmt? Mit diesen Fragen im Gepäck kann man sich an die mathematische Analyse machen. Wie werden vom Luftwiderstand absehen und den menschlichen Körper als „Massepunkt“ betrachten (genauer: wir betrachten nur den *Schwerpunkt* des Körpers, dieser wird sich näherungsweise auf Höhe des Schaukelbretts befinden, in Wirklichkeit wird er etwas darüber liegen), womit

wir schon erste Idealisierungen vorgenommen haben und die Resultate also nur näherungsweise stimmen, aber wohl hinreichend genau<sup>2</sup>. Das ist immer der erste Schritt in praktisch allen *Modellierungskreisläufen*, von denen es bekanntlich ja einige gibt in der fachdidaktischen Literatur, z. B. (Blum/Leiß 2005) oder (Niss/Blum 2020, S. 11ff).

Wir haben es also mathematisch/physikalisch mit folgender Situation zu tun (Abb. 3): Nach einer „Pendelbewegung“ (auf der Schaukel) kommt eine Flugphase (*Flugparabel*), und die Gesamtweite soll maximal sein.

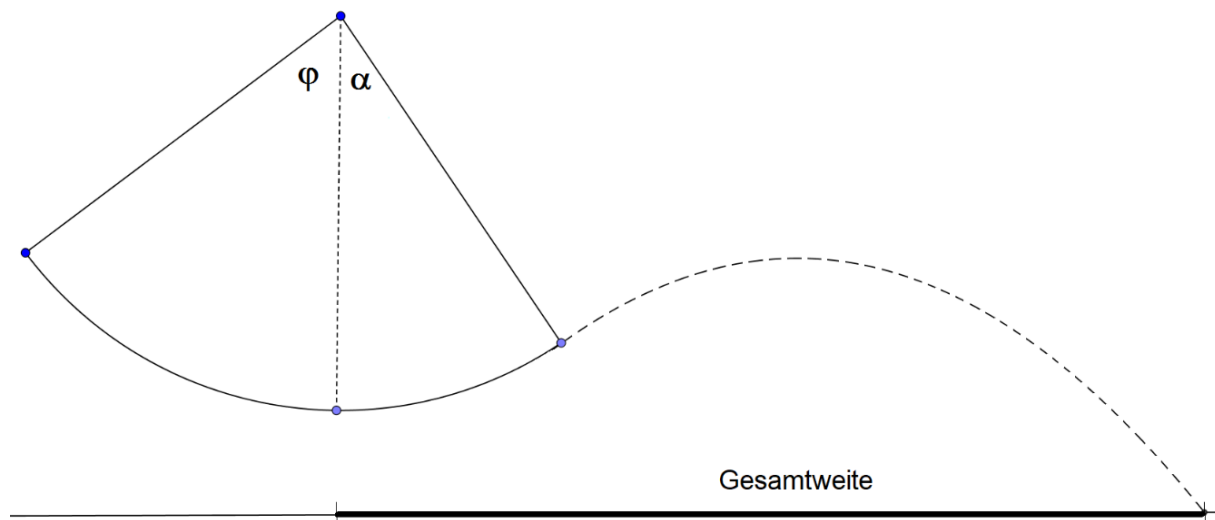


Abb. 3: Flugparabel nach dem Absprung

In Abb. 3 fliegt der Schwerpunkt bis zum Boden, das ist aber in Wirklichkeit nicht so, denn der Körperschwerpunkt ist bei der Landung am Boden ja auch ungefähr auf Höhe des (ruhenden) Schaukelbrettes, sodass man also eigentlich besser von einer Situationsskizze wie in Abb. 4 ausgeht (in Wirklichkeit wird  $W$  natürlich am Boden gemessen, und zwar bis zu den Füßen, aber hier haben wir diese Strecke der Einfachheit halber angehoben um die Sitzhöhe bzw. um die menschliche Schwerpunkthöhe beim Landen, und wir sehen davon ab, dass die Füße eigentlich etwas weiter vorne liegen als der Schwerpunkt):

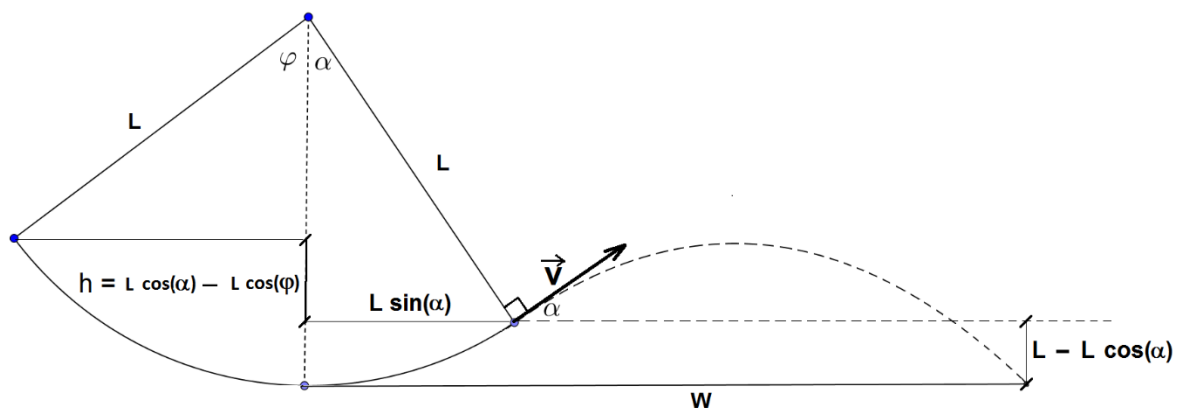


Abb. 4: Verbesserte Situationsskizze

<sup>2</sup> Wir wollen davon absehen, dass die Füße bei der Landung meist etwas weiter *vorne* sind als der Schwerpunkt, eine weitere Idealisierung bzw. Vereinfachung.

Dabei könnte man auch annehmen, dass der Körperschwerpunkt bei der Landung am Boden etwas höher oder tiefer als die Höhe des ruhenden Schaukelbrettes liegt, die prinzipielle Problemlage bliebe die gleiche.

Zu maximieren haben wir die Sprungweite  $W$  bei gegebenen Werten des Winkels  $\varphi$  und der Schaukelkettenlänge (es könnte auch eine Stange sein)  $L$ . Genauer: Wenn  $L$  der Abstand von der Schaukeldrehachse zum Körperschwerpunkt ist, diesen nehmen wir nahe dem Schaukelbrett an, dann suchen wir jenen Wert von  $\alpha$ , der  $W$  maximiert. D. h. unser Ziel muss sein,  $W$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ ,  $L$  (feste

Parameter; auch die Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  wird vorkommen) und  $\alpha$  (Variable) darzustellen

(„funktionales Denken“). Allein das ist eine relativ anspruchsvolle Aufgabe! Für den algebraischen Teil danach wird man sich wohl Hilfe mittels „Technologie“ holen (Ableiten, Nullstellen berechnen, Graphen zeichnen, etc.), und die Frage, ob die entstehende Gleichung  $W'(\alpha) = 0$  geschlossen lösbar sein wird oder nur numerisch (näherungsweise; nach Festlegung von  $L$  und  $\varphi$ ), ist ja nicht mehr so relevant bei Einsatz von Technologie. Früher wäre das ein Knock-out-Kriterium für den Einsatz im Unterricht gewesen, heutzutage nicht mehr.

Für das Aufstellen einer Gleichung der Flugparabel braucht man bekanntlich die Anfangsbedingungen, d. h. Informationen über die (Anfangs-)Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , nämlich ihren Betrag  $v := |\vec{v}|$  und den zugehörigen Winkel. Da das „Abfliegen“ tangential zum „Schaukelkreis“ erfolgt, ist der Winkel zu Beginn als  $\alpha$  abzulesen (Normalwinkel), aber wie groß ist  $v := |\vec{v}|$ ?

Hier ist es wohl am einfachsten, über den Energievergleich (kinetische und potentielle Energie) zu gehen, ein in der Physik oft angewandtes Konzept: Danach gilt, dass die momentane *kinetische Energie*  $\frac{mv^2}{2}$  eines Pendels vom Verlust potentieller Energie  $mgh$  stammt (wenn keine anderen äußeren Kräfte wirken, d. h. niemand anschubst). Dabei ist  $v$  die Momentangeschwindigkeit des Pendels (insbesondere auch im Moment des Abspringens, und damit die Absprunggeschwindigkeit) und  $h$  der momentane Höhenunterschied zur Anfangsposition der Schaukel (Auslenkung  $\varphi$ ), siehe Abb. 4. Durch die Gleichsetzung  $\frac{mv^2}{2} = mgh$  ergibt sich allgemein  $v = \sqrt{2gh}$ , wobei dies, wie bereits erwähnt, auch im interessierenden Moment des Abspringens gilt. Der Höhenunterschied zwischen Anfangsposition der Schaukel (Auslenkung  $\varphi$ ) und Absprungposition ist  $h = L \cos(\alpha) - L \cos(\varphi)$  (Abb. 4), und damit erhält man

$$v = \sqrt{2gL(\cos(\alpha) - \cos(\varphi))}, \quad (*)$$

wobei  $g$  die Erdbeschleunigung ist (die Masse  $m$  kürzt sich heraus).

Die Darstellung der Flugparabel in Abhängigkeit von  $v, \alpha$  ist (kann entweder hergeleitet oder auch einfach nur nachgeschlagen werden)

$$y(x) = \tan(\alpha)x - \frac{g}{2v^2 \cos^2(\alpha)}x^2.$$

Dabei ist der *Abflugpunkt* der *Ursprung* des Koordinatensystems.

Diese Beziehung kann verwendet werden, um auszurechnen, bei welcher Weite („ $x$ “) die „negative Höhe“  $L \cos(\alpha) - L = L(\cos(\alpha) - 1)$  erreicht wird (wenn man den Schwerpunkt des Körpers ein wenig höher/tiefer ansetzte als wir, so müsste dieser Wert entsprechend verändert werden). Addiert man schließlich zu diesem  $x$ -Wert noch  $L \sin(\alpha)$ , so hat man eine Darstellung der gesuchten Flugweite  $W$ .

Als erstes wird man also die Gleichung  $L(\cos(\alpha) - 1) = \tan(\alpha)x - \frac{g}{2v^2 \cos^2(\alpha)}x^2$  nach  $x$  lösen (quadratische Gleichung in  $x$ ). Die positive Lösung ist hier

$$x = \frac{v^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} + \frac{v \cos(\alpha)}{g} \sqrt{v^2 \sin^2(\alpha) - 2Lg \cos(\alpha) + 2Lg}.$$

Damit gilt  $W = \frac{v^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} + \frac{v \cos(\alpha)}{g} \sqrt{v^2 \sin^2(\alpha) - 2Lg \cos(\alpha) + 2Lg} + L \sin(\alpha)$ . Dabei ist  $v$  keine Konstante, sondern hängt vermöge (\*) von  $\alpha$  ab. Man erkennt, dass man durch Einsetzen von (\*), d. h. Ersetzen von  $v$  durch den entsprechenden Term in (\*) – zu einer Funktion  $W$  (mit Variable  $\alpha$ ) kommt, deren Nullstelle der ersten Ableitung kaum geschlossen zu finden sein wird.

Man kann aber mit Computer-Algebra-Systemen (CAS) bei vorgegebenen Werten von  $L$  und  $\varphi$  *näherungsweise* (d. h. numerisch) die Gleichung  $W'(\alpha) = 0$  im Bereich  $0 \leq \alpha \leq \varphi$  lösen (jedes CAS verfügt über entsprechende Befehle). Diese Lösung  $\alpha_{\text{opt}}$  gibt dann den optimalen Absprungwinkel an,  $W(\alpha_{\text{opt}})$  die zugehörige Sprungweite.

Ein Ergebnis könnte eine Tabelle für  $\alpha_{\text{opt}}$  bzw. die Sprungweite  $W$  bei verschiedenen Werten von  $\varphi$  sein (Tab. 1, für  $L$  haben wir hier  $L = 3 \text{ m}$  genommen,  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ).

$\varphi$ [°]	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
$\alpha_{\text{opt}}$ [°]	9,8	14,5	19	23	26	29	31	33	35	36	37	38	39	40	40	41	41
$W$ [m]	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7	2,1	2,4	2,8	3,2	3,7	4,1	4,6	5,1	5,6	6,1	6,7	7,2

Tab. 1: Optimale Absprungwinkel und zugehörige Sprungweiten

**Bemerkung:** Wenn man in der Funktion  $W$  wirklich  $v$  durch (\*) ersetzt, so sieht man zwei interessante Aspekte: Erstens sieht man, dass sich  $g$  herauskürzt, und zweitens, dass  $L$  insgesamt als Faktor herausgehoben werden kann. Das bedeutet einerseits, dass es auf die Erdanziehungskraft hier gar nicht ankommt, die Sprungweite wäre am Mond und auf der Erde gleich! Andererseits bedeutet das die direkte Proportionalität zu  $L$ , d. h. bei doppelter Länge  $L$  ergibt sich auch die doppelte Sprungweite  $W$  (dies ist vermutlich nur bei unserer Annahme Körperschwerpunkthöhe bei der Landung = Körperschwerpunkthöhe auf der ruhenden Schaukel der Fall)! Des Weiteren ist damit klar, dass der optimale Absprungwinkel  $\alpha_{\text{opt}}$  nicht von  $L$  abhängt. Diese Aspekte sind für die Weiterverarbeitung mit Computer nicht wichtig, sie beschreiben einfach jeweils für sich interessante Phänomene.

Wie man in der Tabelle schon sieht, scheint es einen Winkel  $\varphi$  in der Nähe von  $80^\circ$  zu geben, für den  $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\varphi}{2}$  gilt. Mit CAS erhält man für diesen Winkel ca.  $80,5^\circ$ . Aus der Tabelle sieht man, dass die Schätzung  $\alpha_{\text{opt}} \approx \frac{\varphi}{2}$  fast immer (für  $\varphi$ -Werte unter  $80^\circ$ ) zu kleine Werte liefert. Ein zugehöriger Plot verdeutlicht dies auch grafisch:

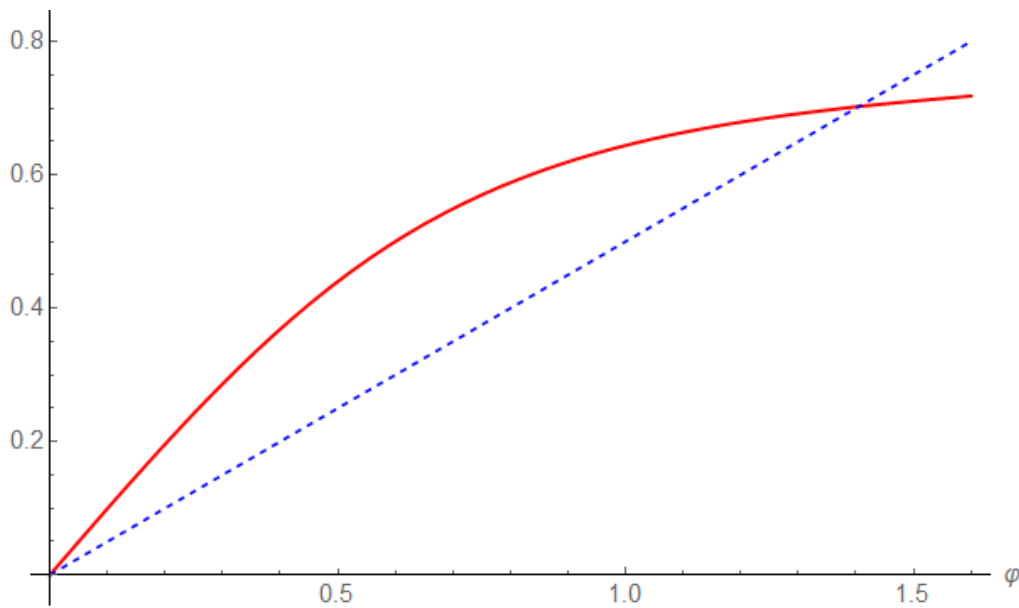


Abb. 5: Die Graphen von  $\alpha_{\text{opt}}$  und  $\frac{\varphi}{2}$ , keine wirklich gute Passung!

Für einen echten menschlichen Schaukelweitspringer stellt sich natürlich auch immer die Frage, ob man in der Luft stabil das Gleichgewicht halten kann (d. h. Kopf oben, Füße unten), denn niemand landet gerne dabei auf dem Rücken (oder noch schlimmer: auf dem Kopf). Es wäre hochinteressant – wenn auch nicht leicht – hier geeignetes Videomaterial genauer zu analysieren: Wie weit liegen beobachtete „Lösungen“ (bei Kindern, die diesen „Sport“ relativ gut beherrschen) und die theoretische Lösung voneinander entfernt?

Es ist schon erstaunlich, was Computer-Algebra-Systeme zu leisten vermögen: Obwohl jeder einzelne Wert der Kurve von  $\alpha_{\text{opt}}$  selbst Ergebnis einer langwierigen Näherungslösung ist, kann der Graph geplottet werden! Diese Aufgabe hätte früher niemals Einzug in einen Lernprozess nehmen können, weil man Gleichungen nicht so einfach näherungsweise auf Knopfdruck lösen konnte. Heutzutage ist die Komplexität der sich ergebenden Gleichung fast gleichgültig (die Rechenarbeit übernimmt dabei ja die Technologie), es kommt darauf an, ob der Ansatz elementar genug ist, dass Lernende auf diesen kommen können (wenn sie alleine arbeiten), bzw. diesen nachvollziehen können, wenn Lehrkräfte diese Aufgabe mit einem Lehrervortrag vorstellen.

Im nächsten Abschnitt beschäftigen wir uns mit einer Aufgabe, die anfänglich vielleicht komplexer erscheint als diese, weil der Ansatz bzw. Kontext eben etwas komplexer ist. Erstaunlicherweise ist aber erstens die resultierende Gleichung deutlich einfacher (wäre sogar ohne Technologie lösbar) und zweitens ist das Ergebnis doch etwas überraschend.

## 2 Schwingende bzw. hangelnde Affen

Vielen Affen mit langen Armen, z. B. Gibbon-Affen, ist es sozusagen in die Wiege gelegt, sich *schaukelnd* bzw. *hangelnd* fortzubewegen, insbesondere von Ast zu Ast, in Käfigen auch oft an der Decke (Gitter) des Käfigs. Bei diesem *schwingenden Hangeln* entlang von Stangen (Seilen, Ästen, Gittern etc.) können diese Affen zwischen den Phasen, in denen sie einen ihrer Arme praktisch als starre Schaukelstange benutzen, auch oft richtige Flugphasen haben. In Tierparks bzw. Tierfilmen und Videos im Internet kann man das alles oft eindrucksvoll beobachten. Für diese Art der Fortbewegung gibt es sogar einen eigenen Fachausdruck, nämlich *Brachiation* oder *Schwinghangeln*.



Abb. 6: Hangelnder Gibbon-Affe

Auch hier kann man ein mathematisches Modell <sup>3</sup> dafür schaffen, wenn man z. B. die *Distanz von einem Griff zum nächsten* maximieren will:

- a) Wann soll der Affe loslassen?
- b) Wie weit bzw. hoch ist dabei seine Flugphase? Gibt es im optimalen Fall immer eine solche?
- c) Wie weit kann er von einem Griff zum nächsten höchstens kommen?

Nicht dass Affen solche Überlegungen bräuchten, die machen das natürlich instinktiv und eignen sich Erfahrung einfach durch *learning by doing* an, aber für eine mathematisch/physikalische Analyse aus menschlicher Perspektive sind solche Überlegungen sehr wohl relevant.

Wir betrachten den *Schwerpunkt* des Affen und nehmen dabei an, dass er zwei unabhängig zu bewegend gleich lange Arme hat (Länge  $L$ , diese entspricht – im obigen Kontext – der Länge der Schaukelstange bzw. -kette). Außerdem nehmen wir an, dass die Stange waagrecht ist und der Affe sich beim Loslassen (vor der Flugphase) und beim Zugreifen (nach der Flugphase) auf gleicher Höhe befindet (Begründung: siehe unten).

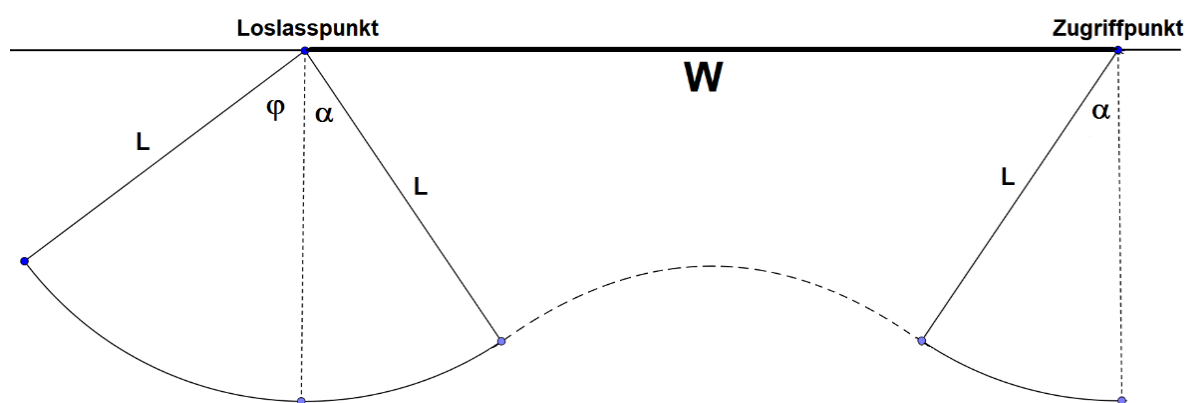


Abb. 7: Situationsskizze für schwingende Affen – die mit  $L$  bezeichneten Strecken stellen sozusagen die Affenarme dar (Hände am oberen Ende, und die Affen selbst als Punktmassen am unteren Ende), der Loslasspunkt und der Zugriffspunkt sind daher auf der oben gezeichneten waagrecht Stange

<sup>3</sup> Die Anregung zu diesem Problem stammt von Daniel Berger (Student, Universität Wien), der in einem Seminar über „Modellierung“ so eine ähnliche Aufgabe für einen Modellierungstag an einer Schule vorschlug. Aber dann realisierte er, dass dies für eine Modellierungsaufgabe für Schüler:innen, die nur 2-3 Stunden Bearbeitungszeit haben, zu kompliziert ist, und hat das nicht weiter ausgearbeitet.



In Abb. 7 sind die Zugriff- und die Loslassssituation symmetrisch zueinander, d. h. insbesondere ist der Affe beim Loslassen und beim Zugreifen auf gleicher Höhe und dort haben seine Arme auch jeweils den gleichen Winkel  $\alpha$  zur Lotrechten. Ist das das Beste, was der Affe machen kann in Bezug auf die Weite? Könnte es nicht sein, dass er durch früheres oder späteres Zupacken  $W$  noch steigern könnte? Intuitiv wird man das eher verneinen, aber warum ist das so?

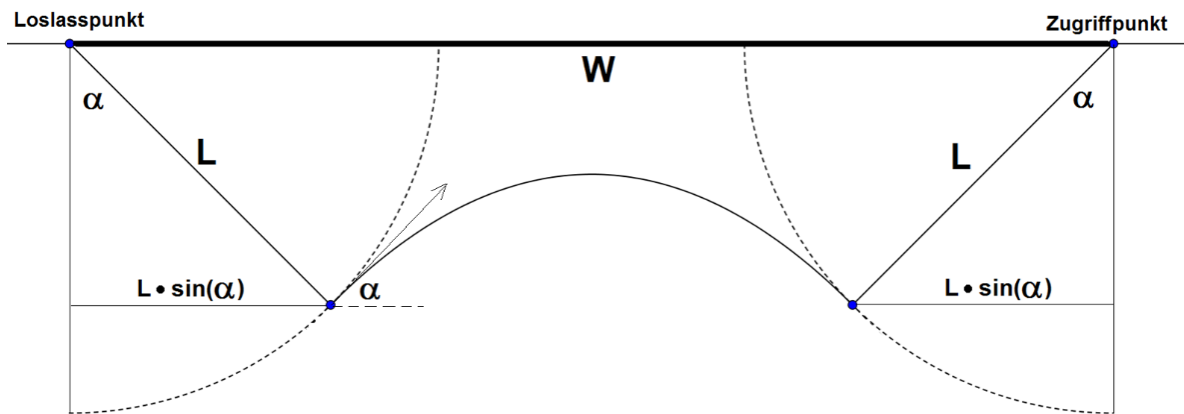


Abb. 8: Parabel berührt beide Kreise

In der Loslassssituation sind *Kreis* (Pendelbahn) und *Flugbahn* (Parabel) *tangential*. Und in der (in Abb. 8 symmetrisch dargestellten) Zugriffssituation ist dies auch der Fall (Abb. 7, 8). Der Affe ist also in keinem Punkt seiner Flugbahn (Parabel) näher am eingezeichneten symmetrischen Zugriffspunkt als in der symmetrischen Situation (Parabel und Kreis haben nur einen Punkt gemeinsam!), daher verliert der Affe Distanz, wenn er früher zugreift. Und auch wenn er später (sozusagen noch ein wenig der Parabel folgend) zugreift, erhöht sich die Distanz zu diesem symmetrischen Zugriffspunkt, daher erreicht er dann diesen und erst recht weiter rechts liegende Punkte nicht mehr, womit die *Optimalität* der zur Loslassssituation symmetrischen Zugriffssituation gezeigt ist<sup>4</sup>.

Also besteht der optimale (maximale) Abstand  $W$  zwischen Loslass- und Zugriffspunkt einerseits aus der horizontalen Flugdistanz (Parabel) und andererseits aus zwei Stücken mit jeweiliger Länge  $L \sin(\alpha)$ .

Zur Berechnung der Horizontalabstand in der Flugparabel hat man die Gleichung

$0 = \tan(\alpha)x - \frac{g}{2v^2 \cdot \cos^2(\alpha)}x^2$  nach  $x$  zu lösen. Das geht nun wegen der 0 auf der linken Seite viel leichter als vorher beim Schaukelweitsprung, es ergibt sich (ohne CAS):  $x = \frac{2v^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g}$ . Mit

$v^2 = 2gL(\cos(\alpha) - \cos(\varphi))$  aus (\*) ergibt sich daraus  $x = 4L(\cos(\alpha) - \cos(\varphi))\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ . Daher erhalten wir für die zu optimierende Weite

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= 4L(\cos(\alpha) - \cos(\varphi))\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 2L\sin(\alpha) \\ &= 2L[(\cos(\alpha) - \cos(\varphi))\sin(2\alpha) + \sin(\alpha)] \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Durch diese Symmetrie ist Folgendes schon klar: Wenn man sich das Hangeln des Affen weiter fortgesetzt denkt, dann muss ab dem 1. Zugriffspunkt  $\alpha_{\text{opt}} = \varphi$  gelten. Der zugehörige Wert wird erst weiter unten klar.



Wieder sieht man, dass die Weite  $W$  erstens unabhängig von  $g$  (also am Mond dieselbe Weite!) und zweitens proportional zu  $L$  ist, dies ist hier allgemein so (oben bei der Schaukel Aufgabe war das nur aufgrund der besonderen Annahme so, dass der Körperschwerpunkt beim Landen auf Höhe des ruhenden Schaukelsitzes ist).

Vermutlich wird man gleich ein CAS zu Hilfe nehmen, die Ableitung bilden, und deren Nullstelle berechnen. Macht man dies, so erhält man als Lösung von  $W'(\alpha) = 0$  den Wert  $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \triangleq 45^\circ$ , überraschenderweise offenbar unabhängig von  $\varphi$  (die Unabhängigkeit von  $L$  ist hingegen a priori klar)!

Nun muss man dieses Ergebnis noch interpretieren. Es ist klar, dass  $\alpha$  nur dann den Wert  $\frac{\pi}{4} \triangleq 45^\circ$  annehmen kann, wenn  $\varphi \geq \frac{\pi}{4}$  ist, denn es gilt ja  $0 \leq \alpha \leq \varphi$  (wenn der Affe starr und ohne äußere Beschleunigung, also ohne angestoßen zu werden, aus einer Ruhelage losschwingt, kann er ja nicht weiter nach vorne schwingen als er zu Beginn Auslenkung nach hinten hat). Wir werden also jetzt eine Fallunterscheidung vornehmen.

- Im Fall von  $\varphi < \frac{\pi}{4}$  ist  $\alpha_{\text{opt}} = \varphi$  (d. h. es ist in diesen Fällen am besten, am Totpunkt auszulassen und *gleichzeitig* mit dem *anderen* Arm zur Stange zu greifen; die Flugphase entfällt dann), denn  $W'(\alpha) > 0$  für  $0 < \alpha < \varphi < \frac{\pi}{4}$ , was sich mit aber auch noch ohne CAS bestätigen lässt.

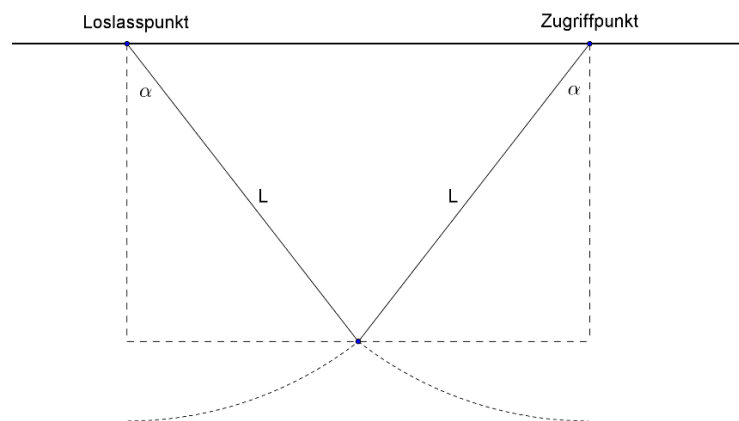


Abb. 9: Umgreifen im Totpunkt

Wir beginnen mit dem Fall  $\varphi < 45^\circ$ , also z. B.  $\varphi = 30^\circ$  (als Armlänge nehmen wir  $L = 1$  m). Der Graph von  $W$  (in Abhängigkeit von  $\alpha$ ) sieht dann aus wie in Abb. 10:

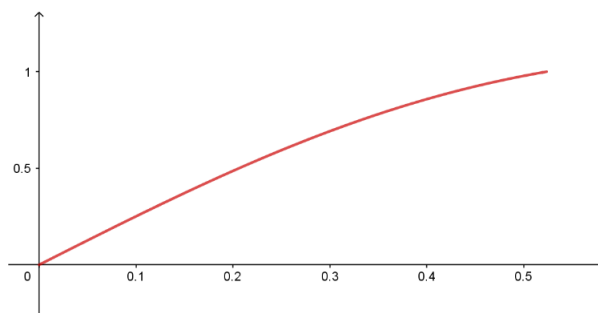


Abb. 10: Graph von  $W(\alpha)$  für  $L = 1$  m und  $\varphi = 30^\circ$

D. h. je größer  $\alpha$ , desto größer<sup>5</sup> ist  $W$ , mit anderen Worten, ein möglichst spätes Loslassen, eben beim Totpunkt  $\alpha = \varphi$ , ist am besten. Es gibt keine Flugphase und die optimale Weite ist gegeben durch  $2L \sin(\varphi)$ .

- Für  $\varphi \geq \frac{\pi}{4}$  ergibt sich immer  $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \triangleq 45^\circ$ ; wir nehmen wieder  $L = 1 \text{ m}$  und diesmal  $\varphi = 80^\circ$  (vgl. Abb. 11).

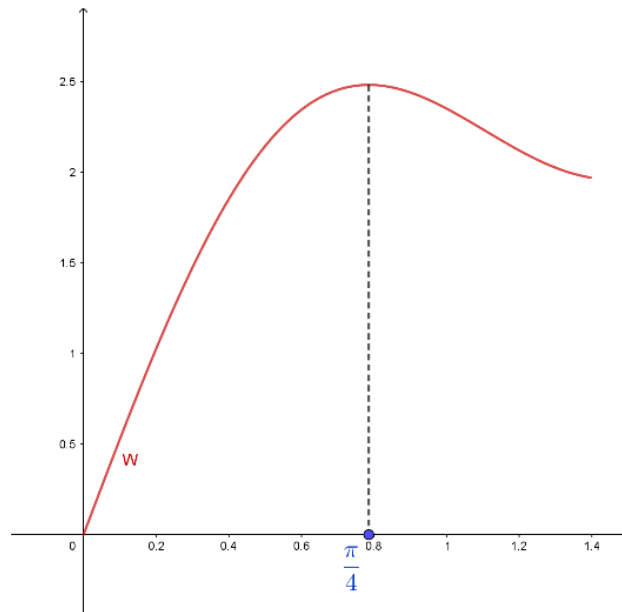


Abb. 11: Graph von  $W(\alpha)$  für  $L = 1 \text{ m}$  und  $\varphi = 80^\circ$

Für  $\varphi \geq \frac{\pi}{4}$  ist der maximale Wert von  $W$  gegeben durch  $2L(\sqrt{2} - \cos(\varphi))$ . Die zugehörige horizontale Flugweite (Parabel) ist  $L(\sqrt{2} - 2\cos(\varphi))$ , und die zugehörige Flughöhe beträgt  $\frac{L}{4}(\sqrt{2} - 2\cos(\varphi))$ . Hier erkennt man: je größer  $\varphi \geq \frac{\pi}{4}$  ist, desto größer sind in der optimalen Situation auch die Werte von  $W$ , Flugweite und Flughöhe. Solange  $\varphi \leq \frac{\pi}{2} \triangleq 90^\circ$  ist, kann der Affenschwerpunkt beim Fliegen nicht über die Höhe der Zugriffstange kommen. Wenn Gibbon-Affen allerdings von weiter oben auf ein bestimmtes Seil springen und dann mittels ihres Armes zunächst schaukeln (pendeln) und dann abspringen (zu einer Flugparabel), um auf diesem Seil weiterzukommen, dann kann es durchaus sein, dass sie während ihrer Flugparabel höher als das in Rede stehende Seil (bzw. die Stange) kommen, und dieses im Sinkflug wieder fassen. Dann haben sie allerdings bei der Startauslenkung  $\varphi$  nicht Geschwindigkeit 0, sondern schon eine gewisse kinetische Energie, die ihnen dazu verhilft „über die Seil- bzw. Stangenhöhe hinaus“ zu kommen während ihres Fluges.

<sup>5</sup> Die strenge Monotonie von  $W$  kann man in diesem Fall auch rechnerisch überprüfen, einerseits durch CAS-Bestätigung von  $W'(\alpha) > 0$  für  $0^\circ \leq \alpha \leq \varphi < 45^\circ$ , oder auch per Hand mit etwas Geschick und Ausdauer:  $W'(\alpha) = \dots = (2\cos^2(\alpha) - 1)(3\cos(\alpha) - 2\cos(\varphi)) > 0$ , weil beide Faktoren positiv sind. Man beachte dabei, dass wegen  $0^\circ \leq \alpha \leq \varphi < 45^\circ$  immer  $\cos(\alpha) \geq \cos(\varphi) > 0$  gilt, und damit  $3\cos(\alpha) - 2\cos(\varphi) > 0$ .

Nun noch kurz zur Lösung  $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \triangleq 45^\circ$  im 2. Fall, diese *schöne* und vielleicht überraschende Lösung legt den Verdacht nahe, dass man sie vielleicht auch ohne CAS erhalten könnte. Das ist auch der Fall. Wenn man in der zu lösenden Gleichung  $W'(\alpha) = 0$  wie üblich substituiert, nämlich  $x := \cos(\alpha)$  und  $c := \cos(\varphi)$ , so ergibt sich die Polynomgleichung 3. Grades  $6x^3 - 4cx^2 - 3x + 2c = 0$ , und diese kann man auch ohne Cardano-Formeln lösen:  $3x(2x^2 - 1) - 2c(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 1)(3x - 2c) = 0$ . Dabei hat man die Einschränkungen  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ ,  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  und  $\alpha \leq \varphi$ .

Aus der ersten Klammer erhält man nach Rücksubstitution unsere Lösung  $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \triangleq 45^\circ$ , die zweite Klammer nimmt im relevanten Bereich nur für  $\alpha = 90^\circ = \varphi$  (d. h.  $x = 0 = c$ ) den Wert 0 an<sup>6</sup> (aber dort liegt ein lokales Minimum bzw. Randminimum, nicht das globale Maximum von  $W$ , siehe Abb. 12).

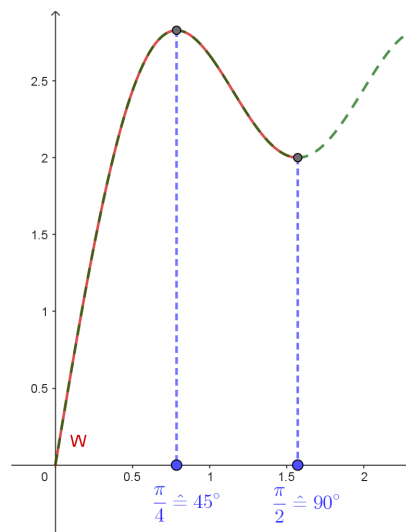


Abb. 12: Graph von  $W(\alpha)$  für  $L = 1 \text{ m}$  und  $\varphi = \pi/2 \square 90^\circ$

Im Nachhinein, und für manche vielleicht sogar im Vorhinein, ist der optimale Winkel  $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \triangleq 45^\circ$  auch sehr plausibel, denn die Flugparabel des Affen hat ja die Eigenschaft, dass Start- und Landepunkt auf gleicher Höhe sind (siehe oben), und in so einem Fall weiß man ja a priori, dass die Flugweite bei (konstanter Abfluggeschwindigkeit) bei  $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \triangleq 45^\circ$  maximal wird. So gesehen ist es doch nicht so ganz überraschend, dass sich im Fall  $\varphi \geq \frac{\pi}{4}$  generell  $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \triangleq 45^\circ$  ergibt. Aber ein wenig eben doch, weil ja eigentlich weder Abflugposition noch -geschwindigkeit konstant sind, und nicht nur die Flugweite, sondern die ganze Distanz zwischen Loslass- und Zugriffspunkt maximiert werden soll.

### 3 Fazit

Der Schaukelweitsprung ist ein authentisches Problem, auch wenn Kinder in der Praxis ohne Mathematik auskommen und dabei viel durch *learning by doing* geschieht. Trotzdem sind mathematische Aspekte (Optimierungsfragen) hier ein Feld, das man im Mathematikunterricht gut behandeln kann, wobei

<sup>6</sup> Für  $3\cos(\alpha) - 2\cos(\varphi) = 0$  muss zunächst wegen  $\cos(\alpha) \geq 0$  auch  $\cos(\varphi) \geq 0$ , d. h.  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$  sein. Wegen  $\cos(\alpha) \geq \cos(\varphi) \geq 0$  ist die einzige Möglichkeit für  $3\cos(\alpha) - 2\cos(\varphi) = 0$  durch  $\cos(\alpha) = \cos(\varphi) = 0$  gegeben.

sinnvoller Technologieeinsatz eine wichtige Rolle spielt. Das soll in keiner Weise bedeuten: **Weil** hier sinnvoller Technologieeinsatz möglich ist, soll man das im Unterricht behandeln. Nein, die Technologie sollte nicht bestimmen, was im Unterricht behandelt werden soll, das sollte immer noch nach rein *fachlichen* Kriterien geschehen. Wir sollten also nicht die richtige Mathematik zur vorgegebenen Technik bzw. Technologie suchen, sondern umgekehrt: die richtige „Technik“ bzw. Technologie beim Unterrichten als sinnvoll erachteter Teile von Mathematik suchen. Dabei kann es auch sehr gut passieren, dass gar keine Technologie zum Einsatz kommt.

Beim Thema *Schaukelweitsprung* geht es mathematisch gesehen um eine substantielle Verbindung von Kreisbewegung und Flugparabel, funktionales Denken, Optimieren, etc., und zwar bei einer Fragestellung, die seit der Kindheit eine Rolle spielt. Die zugehörigen Modellierungsschritte sind nicht ganz einfach, und der Kontext ist auch ziemlich physikalisch, sodass auch fächerübergreifendes Arbeiten mit Physik möglich wäre. Die Zielfunktion ist ziemlich kompliziert aufgebaut, aber mittels Technologie kann man das Problem lösen. Das zweite Thema (schwingende Affen) ist zwar nicht mehr so authentisch in der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler vertreten, aber es hat auch seine Vorzüge: Erstens entpuppt sich dabei wieder einmal die *Symmetrie* als ideal, zweitens ist nach dieser Erkenntnis die resultierende Zielfunktion sogar deutlich einfacher als beim Schaukelweitsprung, sogar ohne CAS behandelbar, was man a priori vielleicht nicht vermuten würde. Und drittens ist – zumindest auf den ersten Blick –

das Resultat vielleicht überraschend, dass für  $\varphi \geq \frac{\pi}{4}$  der optimale Loslasswinkel immer  $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\pi}{4} \triangleq 45^\circ$  beträgt. Auf einen zweiten Blick ist das vielleicht nicht mehr so, und auch solche Erkenntnisse und Erklärungen im Nachhinein sind wichtige Lerngelegenheiten. Natürlich sind das keine rasch zu erledigenden Übungsaufgaben oder gar Prüfungsaufgaben, es sind Lernaufgaben (insbesondere in Wahlpflichtfächern), die ihre Zeit benötigen, aber es wäre u. E. sinnvoll genutzte Zeit. Dabei ist der Grad der Selbständigkeit der Lernenden hier sehr variabel. Im Rahmen eines Modellierungstages oder dergleichen wird er relativ hoch. Geben Sie hier eine Formel ein, sein, im Rahmen eines Regelunterrichtes vielleicht deutlich geringer.

## Literatur

- Blum, W. & Leiß, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *mathematik lehren*, 128, 18–21.
- Humenberger, H. (2022): Modelling and Optimizing Regarding Swings and Swinging Monkeys. In: *Australian Mathematics Education Journal* (AMEJ) 4, 3, 43–48.
- Humenberger, H. (2024): Modellieren und Optimieren bei Schaukeln und schwingenden Affen. In: *Der Mathematikunterricht* 70, 1, 45–54.
- Niss, M. & Blum, W. (2020): *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*. London, New York: Routledge

## Verfasser

Hans Humenberger  
 Universität Wien  
 Fakultät für Mathematik  
 Oskar-Morgenstern-Platz 1  
 A – 1090 Wien  
 hans.humenberger@univie.ac.at